***MỘT SỐ BÀI TẬP***

* ***Bài tập 1***

*Cho là quá trình Wiener tiêu chuẩn, hãy tính vi phân ngẫu nhiên Itô cho hàm*

***Hướng dẫn giải***

*Sử dụng cách tính đạo hàm riêng theo x ta sẽ thu được*

*⇒*

*Mặt khác:*

*Từ đó áp dụng công thức Itô, với chú ý rằng*

*ta sẽ có:*

*⇒*

* ***Bài tập 2***

*Cho là quá trình Wiener tiêu chuẩn, hãy tính vi phân ngẫu nhiên Itô cho hàm*

***Hướng dẫn giải***

*Ta có nhận xét: ; từ đó suy ra*

*Từ đó áp dụng công thức Itô, ta thu được*

*Thành phần chuyển dịch của là:*

*thành phần khuếch tán là: .*

* ***Bài tập 3***

*Cho 2 quá trình ngẫu nhiên có vi phân Itô tương ứng là*

*(Quá trình Ornstein-Uhlenbeck)*

*(Quá trình Black-Scholes)*

*Hãy tìm vi phân tích và vi phân thương của chúng.*

***Hướng dẫn giải***

*Áp dụng các công thức sau để tính các vi phân cần tìm*

* (\*)*

*** (\*\*)***

*Từ công thức (\*) ta sẽ thu được*

*Từ công thức (\*\*) ta sẽ thu được*

*.*

* ***Bài tập 4***

*Cho không gian xác suất trong đó , và các xác suất*

*với các tập mờ xác định bởi:*

*Hãy tìm xác suất của các sự kiện mờ A và B.*

***Hướng dẫn giải***

* ***Bài tập 5***

*Cho phân phối đều trên đoạn xác định bởi hàm mật độ*

*Với A là tập mờ với hàm thuộc dạng*

*Hãy tính*

1. *Xác suất của sự kiện mờ A.*
2. *Phương sai của sự kiện mờ A*
3. *Momen bậc 3 của sự kiện mờ A*

***Hướng dẫn giải***

* ***Bài tập 6***

*Xét sự hội tu của chuỗi các biến ngẫu nhiên , trong đó là các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối chuẩn*

***Hướng dẫn giải***

*Để giải bài này ta áp dụng định lý 2 chuỗi Kolmogorov. Theo đó ta phải xét sự hội tụ của 2 chuỗi số thực là chuỗi của của kỳ vọng và chuỗi của các phương sai tương ứng. Cụ thể trong bài tập này ta phải trả lời về tính hội tụ của các chuỗi sau*

*và chuỗi*

*Trong phần học về chuỗi số ta thấy 2 chuỗi trên là dạng chuỗi Dirichlet và chúng đều hội tụ. Về chuỗi Dirichlet có thể tóm tắt như sau – nó có dạng áp dụng tiêu chuẩn tích phân ta kết luận được:*

* *Chuỗi hội tụ khi*
* *Chuỗi phân kỳ khi*

*Từ đó theo định lý 2 chuỗi Kolmogorov ta kết luận chuỗi biến ngẫu nhiên đã cho là hội tụ.*

* ***Bài tập7***

*Cho là một quá trình Poisson phức hợp (hay còn gọi là đa hợp), nó có dạng: ,*

*trong đó là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối chuẩn tắc và là một quá trình Poisson thuần nhất với cường độ độc lập với mọi*

*Hãy tính kỳ vọng và phương sai của quá trình*

***Hướng dẫn giải***

*Theo những điều kiện đã nêu về quá trình Poisson phức hợp áp dụng các kết quả lý thuyết (xem lại bài 4, phần 2.4) ta sẽ có:*

*;*

* ***Bài tập 8***

*Cho là một quá trình Wiener tiêu chuẩn và là một chuyển động Brown trôi dạt có dạng:*

*Hãy tính vi phân Itô cho tích*

***Hướng dẫn giải***

*Vì là một quá trình Wiener tiêu chuẩn nên ta sẽ có*

*Và theo giả thiết về ta có*

*Từ đó theo công thức vi phân tích ta sẽ thu được*

# **XÍCH MARKOV VÀ QUÁ TRÌNH MARKOV**

# ***(Markov chains and Markov Process)***

* **Khái niệm cơ bản về tính Markov**

Nhà toán học Nga A. A. Markov đầu thế kỷ XX đã đưa ra một loại mô hình khá phổ biến và đơn giản về các quá trình ngẫu nhiên có đặc tính là: *Tương lai chỉ phụ thuộc vào hiện tại và độc lập với quá khứ* - đặc tính đó sau này người ta thường gọi là tính Markov. Từ xuất phát điểm này ta sẽ xây dựng mô hình về xích Markov và quá trình ngẫu nhiên Markov

Khi xét một hệ vật lý (hạt, vật thể, một giống loài sinh vật,…) được mô hình hóa trong các trạng thái ngẫu nhiên, mà tập các trạng thái là hữu hạn hoặc vô hạn đếm được. Ta ký hiệu là trạng thái của hệ tại thởi điểm t và là tập thời gian (rời rạc hoặc liên tục). Để đơn giản ta ký hiệu trạng thái bởi các số nguyên, và tập trạng thái bởi tập .

Khi đó tính Markov đã nêu trên có thể biểu diễn dưới dạng:

với mọi sự kiện xảy ra trong khoảng thời gian

Khi là quá trình với thời gian rời rạc và trạng thái rời rạc thì hệ thức trên viết lại là:

,

với mọi trạng thái và với mọi thời gian .

* *Xích Markov là quá trình ngẫu nhiên có tính Markov với thời gian rời rạc.*

Nếu là quá trình ngẫu nhiên có đặc tính Markov thì với thời gian rời rạc và trạng thái rời rạc nó sẽ có đặc tính sau:

,

trong đó là sự kiện ngẫu nhiên vô hạn chiều.

* ***Ví dụ.*** Xích Markov với thời gian rời rạc và trạng thái rời rạc –“bước ngẫu nhiên”.

Xét chuyển động ngẫu nhiên với xác suất chuyển xác định như sau:

trong đó là những số dương thỏa điều kiện:

* **Xích Markov dừng (Xích Markov thuần nhất)**
* ***Định nghĩa 1****:* *Quá trình ngẫu nhiên với không gian trạng thái (hữu hạn hoặc vô hạn đếm được) được gọi là xích Markov dừng (hay còn gọi là thuần nhất theo thời gian-time homogeneous) nếu:*

*với mọi trạng thái thuộc và với mọi thời gian* .

* ***Định nghĩa 2:*** *Ma trận xác suất chuyển sau một bước của xích Markov xác định bởi:*

Hãy chú ý đến các tính chất sau của ma trận xác suất chuyển sau một bước.

*Xác suất chuyển sau n bước*:

Trước hết ta quy ước về xác suất ở trang thái ban đầu

Ta ký hiệu ma trận xác suất chuyển sau n bước là:

trong đó là xác suất chuyển sau n bước từ trạng thái i đến j.

* ***Phương trình Chapman-Kolmogorov:***

Phương trình Chapman-Kolmogorov sẽ chứng minh được theo công thức xác suất đầy đủ và theo tính Markov như sau:

Vậy phương trình Chapman-Kolmogorov có thể biểu diễn dưới dạng ma trận

trong đó: (với là ma trận xác suất chuyển đã xác định ở trên), và

ta hiểu như ma trận tích,

* ***Phân phối ban đầu****: Phân phối ban đầu (initial distribution) của xích Markov là tập trong đó:*

Trong nhiều ứng dụng người ta thường giả định phân phối ban đầu là xác định, chẳng hạn thường cho và trong trường hợp này phân phối ban đầu của xích Markov cho ta:

Tổng quát hơn ta có:

Các xác suất sau n bước:

;

được suy ra từ phân phối ban đầu

* ***Phân loại trạng thái***

***Định nghĩa*** *về các trạng thái đặc biệt:*

* *Ta nói rằng trạng thái j là tới được (accessible) từ i nếu tồn tại sao cho khi đó ta viết*
* *Nếu i là tới được từ j, và j là tới được từ i, khi đó ta nói rằng các trạng thái i và j là liên thông (communicating), và ta viết .*

*Nếu ta nói rằng i và j thuộc cùng một lớp liên thông.*

* *Trạng thái i được gọi là hồi quy (recurrent) nếu:*

* *Nếu thì ta nói rằng i là trạng thái không hồi quy, hay còn gọi là trạng thái di chuyển (transient).*

*Cho i là trạng thái hồi quy, giá trị trung bình của nó xác định bởi*

*khi đó:*

* *i là trạng thái dương nếu (positive recurrent).*
* *i là trạng thái không nếu (null recurrent).*

*Chu kỳ của trạng thái i được ký hiệu là và được xác định là ước chung lớn nhất của các số nguyên sao cho*

* *Nếu đối với mọi thì ta đặt*
* *Nếu thì trạng thái i được gọi là không có chu kỳ (aperiodic).*

*Các trạng thái của cùng một lớp sẽ có cùng chu kỳ.*

*Xích Markov mà không gian trạng thái chỉ có duy nhất một lớp liên thông được gọi là không rút gọn được (irreducible) hay còn gọi là tối giản.*

* *Các trạng thái hồi quy dương (positive recurrent) và không có chu kỳ được gọi là ergodic.*
* ***Các ví dụ.***

*Ví dụ1.*

Cho ma trận xác suất chuyển với 3 trạng thái là :

Ta thấy rằng: với mọi do đó trạng thái là trạng thái không có chu kỳ.

*Ví dụ 2.*Cho ma trận xác suất chuyển;

Không gian trạng thái gồm: , trong đó có 2 lớp trạng thái liên thông là:

và

*Ví dụ3.*

Cho ma trận xác suất chuyển xác định bởi ma trận:

Không gian trạng thái gồm: ,

Ta sẽ có:

*Ví dụ 4.*Cho ma trận xác suất chuyển;

Không gian trạng thái gồm: .

Ta sẽ có:

*Ví dụ 5.*Cho ma trận xác suất chuyển theo mô hình Junkes-Cantor khi nghiên cứu đột biến di truyền của ADN (Axit Deoxyribo Nucleotic) trong đó có các nucleotic là Adenine (A), Guanine (G), Cytosine (C), và Thymine (T), từ mô hình đó sẽ thu được ma trận xác suất chuyển tương ứng là:

trong đó

.

Sử dụng tính Markov và của tích ma trận sau n bước chuyển ta sẽ có:

trong đó

Mặt khác là ma trận xác suất chuyển nên tổng các phần tử của các hàng của nó đều bằng một nên ta sẽ thu được:

Từ hai phương trình trên ta sẽ suy ra:

Tương tự như vậy với ta cũng sẽ có:

Ta có nhận xét: Khi ta sẽ có:

* **Phân phối dừng của xích Markov**
* ***Định lý 1.***

*Với i là trạng thái hồi quy, không chu kỳ (d(j)=1) của xích Markov, khi đó:*

1. *Nếu i và j liên thông thì*

*2) Nếu i và j không liên thông thì*

* ***Định lý 2.***

*Cho xích Markov có tập các trạng thái S là egodic và tối giản (irreducible), khi đó các xác suất:*

*sẽ tao nên một phân phối xác suất , mà ta gọi nó là* ***phân phối dừng****.*

*Phân phối dừng được xác định theo những kết quả sau:*

1. *và*
2. *Hoặc với mọi hoặc*
3. *Nếu tất cả thì không tồn tại phân phối dừng.*

*Còn nếu như thì phân phối dừng là nghiệm duy nhất của hệ phương trình ( Hay viết dưới dạng ma trận là )*

Ta trở lại *ví dụ 5* để xét phân phối dừng của nó.

Áp dụng định lý 2, ta cần giải hệ phương trình:

với điều kiện:

Tìm nghiệm duy nhất của hệ phương trình này, ta sẽ thu được nghiệm đó là:

Vậy phân phối dừng trong trường hợp này là:

***BÀI TẬP VỀ XÍCH MARKOV***

* ***Bài tập 1***

*Cho xích Markov với ma trận xác suất chuyển*

*Hãy tìm phân phối dừng cho xích Markov nói trên.*

* ***Hướng dẫn giải****:*

Để tìm phân phối dừng ta cần giải hệ phương trình:

trong đó  cụ thể ta sẽ thu được hệ phương trình tuyến tính sau:

cùng với điều kiện

Ta sẽ tìm được nghiệm là

*.*

* ***Bài tập 2***

*Cho xích Markov với ma trận xác suất chuyển là*

*Hãy tìm phân phối dừng tương ứng của xích Markov đó.*

* ***Hướng dẫn giải:***

Phân phối dừng sẽ là nghiệm không âm của hệ phương trình

Giải hệ phương trình trên ta sẽ thu được nghiệm là:

Vậy phối dừng tương ứng của xích Markov đó là:

* ***Bài tập 3***

*Cho ma trận xác suất chuyển của xích Markov có dạng*

*Hãy tìm phân phối dừng tương ứng của xích Markov đó.*

* ***Hướng dẫn giải****:*

Ta cần giải hệ phương trình tuyến tính



Ta viết lại hệ dưới dạng



Kết hợp với điều kiện

Ta sẽ thu được nghiệm của hệ phương trình là

Vậy phối dừng tương ứng của xích Markov là

* ***Bài tập 4***

*Cho ma trận xác suất chuyển của xích Markov có dạng*

*Hãy tìm giới hạn: .*

* ***Hướng dẫn giải****:*

Với ta sẽ có

trong đó Từ đó sẽ suy ra

* ***Bài tập 4***

*Cho xích Markov có ma trận xác suất chuyển là*

*Có tồn tại giới hạn hay không, tại sao?*

* ***Hướng dẫn giải:***

Ta có nhận xét

Vậy không thể tồn tại giới hạn

* ***Bài tập 5 (Mô hình phân chia thị trường)***

*Gỉa sử ta có 3 đại lý cùng phân phối một loại ga trong một khu vực với 1000 khách hàng (E={1,2,3}) với phân phối ban đầu:*

*theo nghĩa, trong giai đoạn đầu đại lý 1 có 200 khách, đại lý 2 có 500 khách, đại lý 3 có 300 khách. Sau một thời gian (khoảng 3 tháng) tình hình có thay đổi do cách phục vụ và cách tiếp thị khác nhau sự phân chia thị trường có biến đổi như sau: đại lý 1 có 220 khách, đại lý 2 có 490 khách, đại lý 3 có 290 khách. Khi điều tra chi tiết người ta thu được ma trận xác suất chuyển sau:*

*Hãy đưa ra dự báo ổn định cho các đại lý này (dự báo dài hạn).*

* ***Hướng dẫn giải:***

Theo mô hình trên, ta có dự báo trong quý 1 (sau 3 tháng) là

Ta có dự báo trong quý 2 (sau 6 tháng) là

Ta sẽ được dự báo ổn định của thị trường là nghiệm của hệ phương trình

Nghiệm tương ứng sẽ là

Giải nghĩa là dự báo dài hạn, ổn định cho các đại lý là

Đại lý 1 sẽ có khoảng 272 khách thường xuyên.

Đại lý 2 sẽ có khoảng 455 khách thường xuyên.

Đại lý 3 sẽ có khoảng 273 khách thường xuyên.